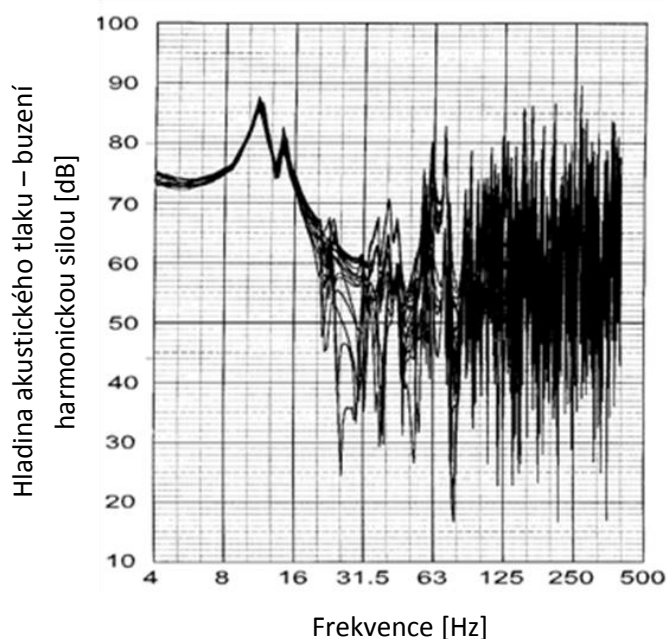


Statistická energetická analýza (SEA)

V současné době existuje řada způsobů, jak řešit vibroakustické problémy. Podobně jako i v jiných odvětvích inženýrství, také ve vibroakustice je žádoucí zvolit nevhodnější metodu řešení problému, a to tak, aby bylo vynaloženo co nejmenší úsilí při minimálních nákladech. Vedle „klasických“ deterministických metod, využívajících diferenciální rovnice druhého řádu, vyvíjejí se od poloviny 20. století též statistické metody, které jsou založeny na energetickém základu. Zatímco první skupina metod je charakteristická velkým počtem rovnic, které je nutné vyřešit pro získání požadovaných veličin (síly, posunutí), druhá skupina vyžaduje řádově mnohem menší počet rovnic založených čistě na energiích. Podstatný je rozdíl typů rovnic, používaných v obou metodách. Jak už bylo řečeno, deterministické metody pracují s diferenciálními rovnicemi, zatímco statistické metody pracují s lineárními algebraickými rovnicemi, které jsou jednoduše řešitelné s použitím běžných metod maticové algebry.

Podstatné je nejen to, že energetické veličiny se dají určit jednodušeji, ale také to, že vztah mezi výkonem a energií není tak citlivý na změnu parametrů, jako je tomu u veličin využívaných v deterministických metodách. Z toho je zřejmé, že na rozdíl od energetických metod nejsou klasické přístupy dobře použitelné pro problémy, u nichž dochází k vyzařování akustické energie při vyšších frekvencích. Na Obr. 1 je uvedena ilustrativní ukázka citlivosti hladiny akustického tlaku při různé frekvenci buzení harmonickou silou na vstupní parametry (kombinace vlastních tvarů, teplota apod.) při použití deterministických metod.



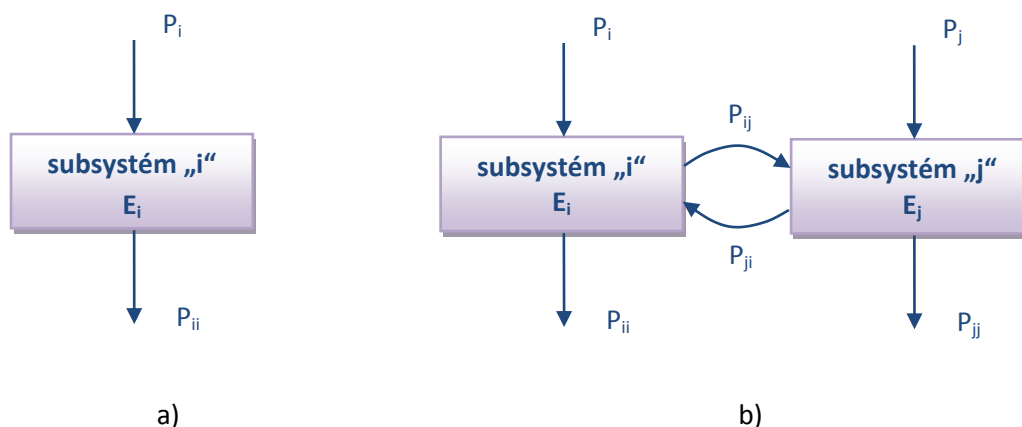
Obr. 1 Ukázka citlivosti MKP výpočtu při vzrůstající frekvenci buzení [4]

Na Obr. 2 je schematicky naznačen postup řešení typické vibroakustické úlohy, tj. určení hladiny akustického tlaku v kavitě pro dané buzení a pohltivost. Je zřejmé, že energetické řešení je elegantnější, rychlejší a poskytuje pouze informaci, kterou opravdu požadujeme. Výsledkem však v tomto případě není deterministicky „přesná“ hodnota, ale spíše jakási „očekávaná“ či „předpokládaná“ hodnota založená na statistických principech.



Obr. 2 Rozdíly v základních algoritmech deterministického a energetického řešení vibroakustických problémů

V současnosti nejrozšířenější energetickou metodou je statistická energetická analýza (SEA). Její počátek sahá do raných 60. let 20. století, kdy vznikla potřeba řešit specifické vibroakustické problémy aerospace průmyslu. Přívlastek „statistický“ odkazuje na to, že proměnné jsou součástí statistických souborů a všechny výsledky jsou „očekávané“ nebo „předpokládané“ hodnoty, tj. hodnoty s určitou mírou pravděpodobnosti. „Energetický“ v názvu metody zdůrazňuje, že metoda pracuje s energetickými veličinami.



Obr. 3 Subsystém SEA: a) jednoduchý subsystém, b) spojení dvou subsystémů

Základní myšlenkou SEA je rozdělení soustavy na skupinu spojených „subsystémů“ („podsystémů“), přičemž je analyzována energetická výměna mezi jednotlivými subsystémy. Celý postup je založen na výpočtu toku výkonů a uložení dynamických energií. Tuto myšlenku a základní princip si ukažme na jednoduchém příkladě jediného subsystému (Obr. 3a).

Buzení tohoto subsystému je charakterizováno vstupním výkonem P_i (power input). Jakmile je do subsystému přiveden tento vstupní výkon, uvnitř subsystému se uloží dynamická energie. V praxi se

však část energie „ztratí“ (např. vlivem disipace). Tato energetická ztráta se dá vyjádřit vztahem pro disipativní výkon (*power loss*):

$$P_{ii} = 2\pi f \eta_i E_i \quad (1)$$

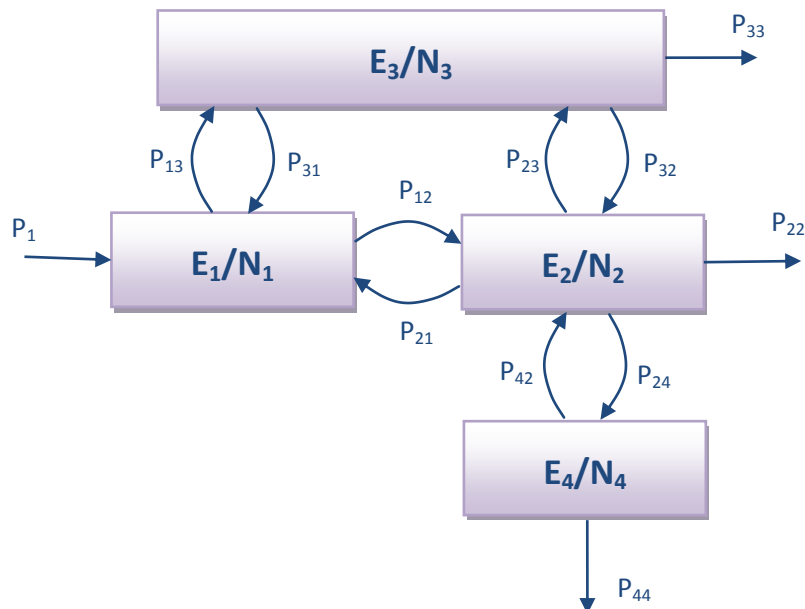
Je zřejmé, že velikost disipativního výkonu závisí na energii uložené v subsystému a na faktoru tlumení η_i (*damping loss factor*). Pokud budeme uvažovat ustálený stav, pak vstupní výkon musí být roven disipativnímu výkonu:

$$P_i = P_{ii} \quad (2)$$

Rozšířme problém o druhý subsystém, který je s prvním vzájemně energeticky propojen (viz Obr. 3b). Je zřejmé, že výkonová bilance vyjádřená rovnicí (2) platí i vzájemně mezi oběma subsystémy. Důsledkem je, že oba subsystémy sdílejí dynamickou energii, výkon teče ze subsystému „i“ do subsystému „j“. Z hlediska subsystému „i“ jde o ztrátu, tj. výkon P_{ij} je výkonem disipativním. Stejný tok existuje i opačným směrem. K určení těchto vzájemných toků je třeba zavést další veličinu η_{ij} , η_{ji} – tzv. faktor ztráty vazeb mezi subsystémy (*coupling loss factor*). Výkon přenášený mezi subsystémy (*power flow*) je pak dán vztahem:

$$P_{ij} = 2\pi f \eta_{ij} N_i \left(\frac{E_i}{N_i} - \frac{E_j}{N_j} \right) \quad (3)$$

kde N_i a N_j je počet módů ve frekvenčním pásmu Δf a podíly v závorce vyjadřují střední modální energii (*modal energy*) každého subsystému ve frekvenčním rozsahu Δf . Tok výkonu je tedy úměrný rozdílu modálních energií.



Obr. 4 Příklad struktury se čtyřmi subsystémy

Na Obr. 4 je zobrazena složitější struktura čtyř subsystémů. Tentokrát uvažujme vstupní výkon pouze u subsystému „1“. Na základě výkonové bilance musí platit rovnost vstupního výkonu a součtu disipativních výkonů. Obecně tedy platí:

$$P_i = P_{ii} + \sum_{j, j \neq i} P_{ij} \quad (4)$$

Konkrétně pro subsystém „1“ můžeme psát:

$$P_1 = P_{11} + P_{12} + P_{13} - P_{21} - P_{31} \quad (5)$$

Záporné znaménko u výkonů P_{21} a P_{31} je zřejmé, neboť jde o výkony, které se přenáší ze subsystémů „2“ a „3“ a pro subsystém „1“ v podstatě tvoří „výkonový zisk“. Podobně můžeme psát výkonovou bilanci pro další subsystémy:

$$\begin{aligned} 0 &= P_{22} + P_{21} + P_{23} + P_{24} - P_{12} - P_{32} - P_{42} \\ 0 &= P_{33} + P_{31} + P_{32} + P_{34} - P_{13} - P_{23} - P_{43} \\ 0 &= P_{44} + P_{42} + P_{43} - P_{24} - P_{34} \end{aligned} \quad (6)$$

Nuly na levých stranách rovnice (6) znamenají, že těmto subsystémům není přiváděn žádný vstupní výkon. Dosadíme-li za vstupní výkon a výkonový tok, pak obdržíme soustavu lineárního rovnic v následujícím tvaru:

$$2\pi f \begin{bmatrix} \left(\eta_1 + \sum_{i \neq 1}^3 \eta_{1i} \right) N_1 & -\eta_{12} N_1 & -\eta_{13} N_1 & 0 \\ -\eta_{21} N_2 & \left(\eta_2 + \sum_{i \neq 2}^4 \eta_{2i} \right) N_2 & -\eta_{23} N_2 & -\eta_{24} N_2 \\ -\eta_{31} N_3 & -\eta_{32} N_3 & \left(\eta_3 + \sum_{i \neq 3}^4 \eta_{3i} \right) N_3 & -\eta_{34} N_3 \\ 0 & -\eta_{42} N_4 & -\eta_{43} N_4 & \left(\eta_4 + \sum_{i \neq 4, i \neq 1}^4 \eta_{4i} \right) N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{E_1}{N_1} \\ \frac{E_2}{N_2} \\ \frac{E_3}{N_3} \\ \frac{E_4}{N_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Parametry η_{ij} ($i \neq j$) na mimodiagonálních pozicích matice jsou faktory ztráty vazeb mezi subsystémy. Parametry v závorkách na diagonále matice jsou celkové faktory tlumení, tj. obecně:

$$\eta_{ii} = \eta_i + \sum_{j \neq i} \eta_{ij} \quad (8)$$

Z uvedené matice je dále patrný reciproční vztah mezi η_{12} a η_{21} :

$$\eta_{21} = \eta_{12} \frac{N_1}{N_2} \quad (9)$$

Energie subsystémů ve vektoru na pravé straně rovnice (7) lze určit následovně:

- V případě mechanického subsystému o hmotnosti m [kg]:

$$E = m \langle v^2 \rangle \quad (10)$$

- V případě akustického subsystému s akustickou impedancí ρc^2 :

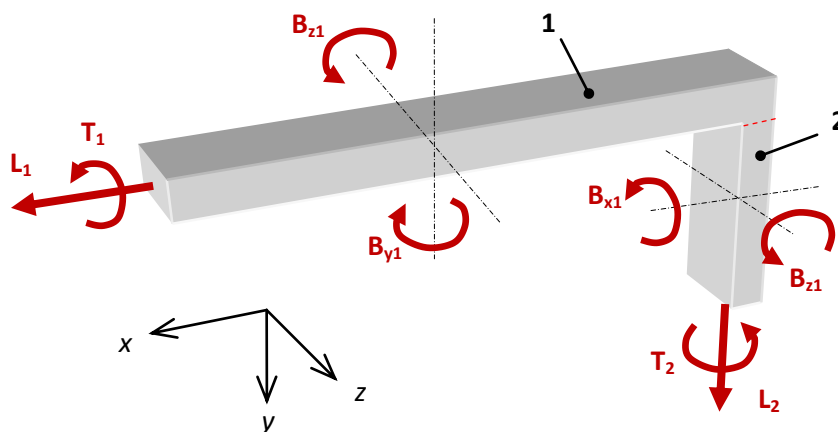
$$E = \frac{v \langle p^2 \rangle}{\rho c^2} \quad (11)$$

V obou případech mají veličiny v ostrých závorkách střední efektivní hodnotu průměrovanou přes prostor subsystému, tj. v prvním případě jde o střední efektivní rychlost a ve druhém případě o střední efektivní akustický tlak.

V předchozích odstavcích byl představen základní princip sestavení soustavy rovnic pro řešení problémů pomocí SEA, avšak pojem subsystém nebyl dosud více rozveden. Subsystémem lze chápat část analyzované struktury, přičemž tato část musí být schopna vibrovat zcela nezávisle na ostatních částech dané struktury. Jinými slovy, subsystémy jsou skupiny stejných modů ve fyzikálních složkách systému. Těmito fyzikálními složkami mohou být nosníky, desky, akustické prostory, potrubí apod., tedy snadno identifikovatelné prvky. Skupiny stejných modů v každé fyzikální složce jsou ty, které mají rezonanční frekvence v daném frekvenčním pásmu a mají podobné tvary kmitů (tj. podélné, ohybové, torzní), takže mají také stejné hodnoty tlumení, buzení a parametry vazby. Parametry pro každou skupinu modů jsou vyhodnoceny jako průměrné přes dané frekvenční pásmo.

Příklad vytvoření subsystémů je uveden Obr. 5. Lomený nosník lze rozdělit na dva přímé nosníky „1“ a „2“. U obou těchto nosníků lze identifikovat tři typy modů: Ohybové (B), torzní (T) a podélné (L). U daného nosníku tedy lze zvolit celkem osm subsystémů (avšak lze vybrat i menší počet). Každá skupina modů nebo subsystém je jedním prvkem modelu SEA, tzn. každý subsystém má jeden stupeň volnosti (průměrnou energii skupiny modů). Každý subsystém je definován několika parametry:

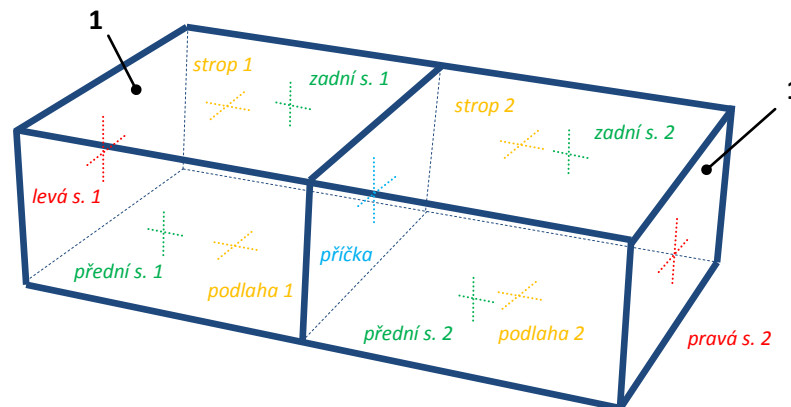
- středním frekvenčním odstupem mezi modálními rezoncencemi
- střední modální činitel tlumení
- celkový vstupní výkon do modů z vnějších buzení
- střední faktor ztrát vazeb mezi subsystémy



Obr. 5 Příklad subsystémů u lomeného nosníku

Na Obr. 6 je další ukázka vytvoření subsystémů. Jde o dvě místnosti oddělené příčkou, přičemž analýza se týká bočního přenosu zvuku. Na tomto obrázku je naznačen model tvořený max. 35 subsystémy (dva pro dvě místnosti a tři pro jednotlivé stěny místností). Avšak problém lze modelovat i jinak. V následujícím přehledu jsou naznačeny tři možné úrovně modelování tohoto problému lišící se počtem definovaných subsystémů:

- 2 subsystémy; subsystémem je celá místnost, tj. uvažován pouze nerezonanční přenos
- 3 subsystémy; subsystémy jsou místnosti a ohybové vlny v příčce, tj. uvažován rezonanční i nerezonanční přenos
- 35 subsystémů; rezonanční, nerezonanční a boční přenos zvuku



Obr. 6 Příklad subsystémů u spojených místností

Použití SEA předpokládá provedení několika nezbytných kroků. V první řadě musí být vytvořen model. Model je vytvořen rozdělením struktury na subsystémy metodami popsanými výše. Vytvoření subsystémů je poměrně obtížný úkol, protože musí být splněna řada předpokladů a musí být vzato do úvahy množství dalších okolností konkrétního řešeného problému. Kromě toho často existuje více možností, jak danou strukturu rozdělit, tj. může být vytvořeno více kvalitativně rozdílných modelů, tzn. nejednoznačnost modelování je další obtíží, se kterou se v SEA setkáváme. Jakmile je model vytvořen, dalším krokem je identifikování frekvenčního rozsahu a šířky frekvenčního pásma, které nás zajímá. Tento postup je společný pro experimentální i predikční SEA.

Hlavním posláním experimentální SEA je určení všech faktorů tlumení a faktorů ztráty vazeb, a to (jak už název metody napovídá) experimentální cestou. Podstata této metody je taková, že se postupně přivede určitý výkon na jednotlivé subsystémy (například úderem kladiva, reproduktorem nebo jiným budičem kmitů) a poté se měří energie v každém subsystému (akcelerometry či mikrofony) – viz Obr. 7. Jakmile je série těchto úkonů provedena, obdržíme pro každý subsystém sadu energií, které označíme E_{ij} , tj. energie subsystému „i“ při buzení subsystému „j“.

Hledaný faktor ztráty vazeb pro subsystém „i“ pak lze ze získaných energií vypočítat ze vztahu:

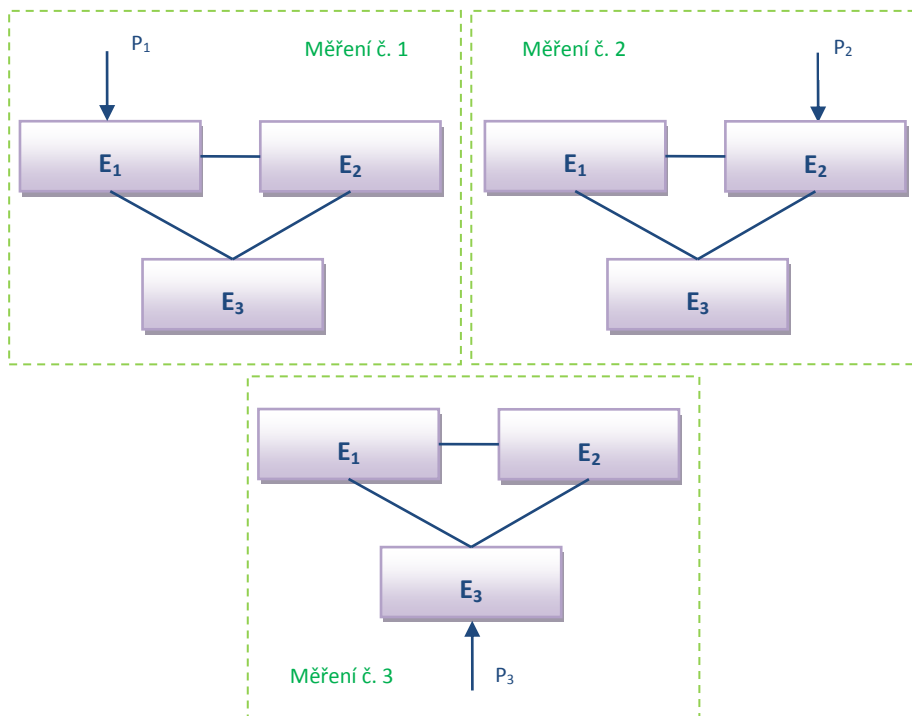
$$\begin{bmatrix} \eta_{1i} \\ \eta_{2i} \\ \eta_{3i} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi f} \frac{P_i}{E_{ii}} \begin{bmatrix} \left(\frac{E_{11}}{E_{i1}} - \frac{E_{1i}}{E_{ii}} \right) & \left(\frac{E_{21}}{E_{i1}} - \frac{E_{2i}}{E_{ii}} \right) & \left(\frac{E_{31}}{E_{i1}} - \frac{E_{3i}}{E_{ii}} \right) \\ \left(\frac{E_{12}}{E_{i2}} - \frac{E_{1i}}{E_{ii}} \right) & \left(\frac{E_{22}}{E_{i2}} - \frac{E_{2i}}{E_{ii}} \right) & \left(\frac{E_{32}}{E_{i2}} - \frac{E_{3i}}{E_{ii}} \right) \\ \left(\frac{E_{13}}{E_{i3}} - \frac{E_{1i}}{E_{ii}} \right) & \left(\frac{E_{23}}{E_{i3}} - \frac{E_{2i}}{E_{ii}} \right) & \left(\frac{E_{33}}{E_{i3}} - \frac{E_{3i}}{E_{ii}} \right) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Matrice je obvykle dobře podmíněná protože hodnoty na diagonále bývají velké (E_{ii} je větší než E_{ij}). Mohou se však vyskytnout případy, kdy vyjdou záporné hodnoty faktoru ztráty vazeb. Za určitých okolností lze tento vztah nahradit mnohem jednodušším vztahem, aby nemusela být prováděna inverze matice:

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2\pi f} \left(\frac{E_{ji}}{E_{ii}} \right) \left(\frac{P_j}{E_{jj}} \right) \quad (13)$$

Abychom mohli použít tento vztah, musí být splněny tyto předpoklady:

- modální energie E/N přímo buzeného subsystému musí být větší než subsystému, se kterým je spojen, tj. vztah neplatí v případě vazby $E_{ij}/N_i \cong E_{ij}/N_j$.
- vztah počítá faktor ztráty vazby mezi dvěma subsystémy z měření pouze těchto subsystémů (dalším předpokladem je, že většina výkonu proudí přímo mezi těmito dvěma subsystémy, ne přes třetí). Tento předpoklad znamená, že uvedená rovnice nemůže být použita pro stanovení nepřímých faktorů ztráty vazby (tj. faktorů ztráty vazeb mezi subsystémy, které nejsou fyzikálně přímo spojeny), dokud dominují nepřímá propojení.



Obr. 7 Postup při experimentální SEA

Faktor tlumení všech subsystémů lze ze získaných energií vypočítat ze vztahu:

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi f} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{21} & E_{31} \\ E_{12} & E_{22} & E_{32} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Hlavní myšlenkou prediktivní SEA je vyhodnocení faktorů ztráty vazeb na teoretickém základě. Díky tomu je možné predikovat chování struktury v počátečních fázích návrhu, kdy ještě není možné provádět měření a experimenty. Postup této metody je následující.

Nejprve je odhadnut faktor tlumení, a to z různých empirických tabulek, z výpočtu či jen čistě ze zkušenosti. Pak pomocí výpočtu či experimentu je určen vstupní výkon. Faktor ztráty vazeb může být spočítán nebo vyhodnocen různými způsoby v závislosti na daném případě:

- z účinnosti přenosu (nebo radiace) – tzv. vlnový přístup
- použitím modálních přístupů
- použitím numerických metod (MKP)
- využitím reciprocity ($\eta_{ij} = \lambda_{ji} \cdot N_j / N_i$)

Jakmile jsou známy všechny nutné vstupní parametry, rovnice SEA mohou být vyřešeny a odezva struktury predikována.

Použitá literatura

1. Mišun, V, *Vibrace a hluk (VUTIUM, VŠ skriptum)*
2. Sarradj, E., *Energy-based Vibroacoustics: SEA and Beyond*
3. Cimerman, B., Bharj. T., Borello, G., *Overview of the Experimental Approach to Statistical Energy Analysis*
4. Fischer, M., *The Statistical Energy Analysis (PowerPoint presentation)*